Ejercicio propuesto 3A.6.8

Adaptado de: 2º final 2011-1, tipo A, problema 3, inciso b).

Efectúe $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{2x}-1}}$.

Resultado: $\operatorname{ang\,tan}\sqrt{e^{2x}-1}+C$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 103.

3A.7 Errores frecuentes

- **No comprobar.** Derivar el resultado toma un minuto y detecta casi todos los errores de signo y de constantes; varias resoluciones publicadas tienen justo esos errores (Apéndice C).
- **Olvidar el factor de v en partes.** Si $\mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x$, entonces $v = \frac{x^2}{2}$, no x^2; si $\mathrm{d}v = e^{2x}\mathrm{d}x$, $v = \frac{1}{2}e^{2x}$.
- **Cambiar de u a media integral cíclica.** En la segunda aplicación de partes hay que elegir el mismo tipo de función como u; si no, se regresa a la integral original y queda $0 = 0$.
- **No dividir una fracción impropia.** Si el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador, las fracciones parciales dan un sistema sin solución.
- **Olvidar términos en la descomposición.** Un $(x-2)^2$ pide $\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$; un cuadrático irreducible pide numerador $Bx+C$, no solo B.
- **Dejar la respuesta en θ.** En la sustitución trigonométrica hay que regresar a x con el triángulo; θ solo aparece como $\operatorname{ang\,sen}\frac{x}{a}$, $\operatorname{ang\,tan}\frac{x}{a}$ o $\operatorname{ang\,sec}\frac{x}{a}$.
- **Olvidar el factor del cambio en $\mathrm{d}x$.** Con $3x = 4\operatorname{sen}\theta$, $\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$, no $\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$.
- **Quitar el valor absoluto del logaritmo.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x-2} = \ln|x-2|$, porque el integrando también existe para $x<2$.

3A.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Partes: $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$; elección de u con LIATE (logaritmo, inversa, algebraica, trigonométrica, exponencial).
- $\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x$; $\int \operatorname{ang\,tan} x\,\mathrm{d}x = x\operatorname{ang\,tan}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.
- $\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x|$; $\int \sec x\,\mathrm{d}x = \ln|\sec x+\tan x|$; $\int \csc x\,\mathrm{d}x = \ln|\csc x-\cot x|$.
- $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$; $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$; $1+\tan^2 x = \sec^2 x$; $1+\cot^2 x = \csc^2 x$.
- $\int \operatorname{sen}^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}2x$; $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sen}2x$.
- $\int \sec^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\big(\sec x\tan x + \ln|\sec x+\tan x|\big)$.
- Sustitución trigonométrica: $\sqrt{a^2-x^2} \to x = a\operatorname{sen}\theta$; $\sqrt{a^2+x^2} \to x = a\tan\theta$; $\sqrt{x^2-a^2} \to x = a\sec\theta$.
- $\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{ang\,tan}\frac{u}{a}$; $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{ang\,sen}\frac{u}{a}$; $\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{ang\,sec}\frac{u}{a}$.
- $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2\pm a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right|$.

2.1.4 Integral impropia

Una integral es *impropia* si un límite de integración es infinito o si el integrando no está acotado en un punto del intervalo (extremo o interior). Se define con un límite:

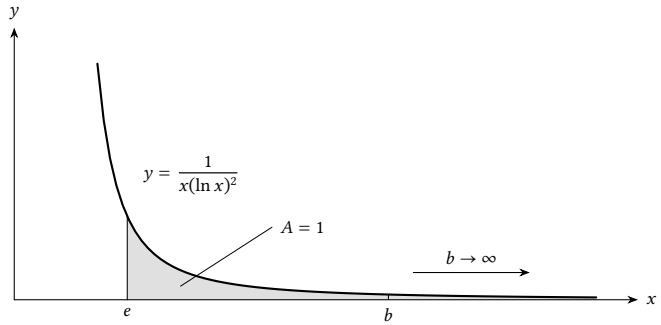
$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

y, si f no está acotada en a,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Si el límite existe y es finito, la integral *converge* y su valor es ese límite; si no existe o es infinito, *diverge*. Con $\int_{-\infty}^{\infty}$, o con un punto malo c dentro de $[a,b]$, se parte en dos integrales y *cada una* debe converger.

Integrales p (sirven para anticipar el resultado): $\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ converge si $p>1$, y $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ converge si $p<1$.



2.2 Cómo reconocer el problema

El enunciado dice…	Procedimiento
«Calcular $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$» con $\log_a$, una base variable o a^x	Derivadas con ln y cambio de base (2.3.1)
$y = f(x)^{g(x)}$, o e elevado a algo con ln	Derivación logarítmica (2.3.1)
Aparecen senh, cosh, tanh en una derivada, integral o límite	Hiperbólicas (2.3.2)
«Calcular, si existe, el límite» de un cociente que da $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$	L'Hôpital (2.3.3)
Un producto que da $0\cdot\infty$, o una resta de fracciones que da $\infty-\infty$	Reescribir como cociente (2.3.4)
Una potencia $f(x)^{g(x)}$ que da 1^{∞}, 0^0 o ∞^0	Tomar logaritmo (2.3.5)

3. $1 = A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-1)$. Con $x=1$: $A=1$. Con $x=2$: $C=1$. Coeficiente de x^2: $A+B=0 \Rightarrow B=-1$.
4. $\int \frac{dx}{x^3-5x^2+8x-4} = \ln|x-1| - \ln|x-2| - \frac{1}{x-2} + C$. Comprobación: al sumar $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}$ sobre $(x-1)(x-2)^2$, el numerador es $(x-2)^2 - (x-1)(x-2) + (x-1) = 1$.

Ejercicio 3A.5.10 · Sustitución $u = x^2$ y después tangente

Adaptado de: 2º final 2019-2, problema 3, inciso b).

Efectúe $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}\,dx$.

Resolución.

1. El factor x es casi la derivada de x^2: $u = x^2$, $du = 2x\,dx$.

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$$

2. Raíz de $1+u^2$: $u = \tan\theta$, $du = \sec^2\theta\,d\theta$, $\sqrt{1+u^2} = \sec\theta$.

$$I = \frac{1}{2}\int \sec\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

3. Regreso: $\tan\theta = u = x^2$, $\sec\theta = \sqrt{1+x^4}$.
4. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + \sqrt{1+x^4}\right) + C$. Comprobación:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2x + \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}}{x^2+\sqrt{1+x^4}} = \frac{x\left(\sqrt{1+x^4}+x^2\right)}{\sqrt{1+x^4}\left(x^2+\sqrt{1+x^4}\right)} = \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}$$

3A.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución y comprueba cada uno derivando. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.3A**.

Ejercicio propuesto 3A.6.1

Adaptado de: 2º extraordinario 2010-1, tipo A, problema 3, inciso a).

Efectúe $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$.

Resultado: $\frac{x}{2}\big[\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)\big] + C$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 101.

Ejercicio propuesto 3A.6.2

Adaptado de: 1er extraordinario 2015-1, problema 3, inciso a).

Efectúe $\displaystyle\int x(\ln x)^2\,dx$.

Resultado: $\frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + C$.

3. Simplifica el nuevo cociente (fracciones dentro de fracciones, factores comunes) y vuelve a sustituir.
4. Si sigue indeterminado, repite. Si un factor tiende a un número distinto de cero (como $\cos x \to 1$ o $\frac{\operatorname{senh} x}{x} \to 1$), sácalo del límite para no derivarlo.

2.3.4 L'Hôpital: formas $0\cdot\infty$ e $\infty - \infty$

1. $0\cdot\infty$: escribe $fg = \frac{f}{1/g}$ o $\frac{g}{1/f}$. Deja en el denominador el factor que sea más fácil de derivar; un ln se queda casi siempre en el numerador.
2. $\infty - \infty$ con dos fracciones: haz la resta con común denominador. Queda $\frac{0}{0}$.
3. Aplica 2.3.3.

2.3.5 L'Hôpital: formas 1^∞, 0^0 e ∞^0

1. Llama $y = f(x)^{g(x)}$ e identifica la forma sustituyendo.
2. Toma logaritmo: $\ln y = g(x)\ln f(x)$. Es $0\cdot\infty$.
3. Escríbelo como cociente, $\ln y = \dfrac{\ln f(x)}{1/g(x)}$, y aplica 2.3.3.
4. Si $\lim \ln y = L$, entonces $\lim y = e^L$. **No olvides este paso:** el límite de $\ln y$ no es la respuesta.
5. Comprobación rápida para 1^∞: si $f\to 1$ y $g\to\infty$, entonces $\lim f^g = e^{\lim g\,(f-1)}$.

2.3.6 Integral impropia de límite infinito

1. Escribe el límite: $\int_a^\infty = \lim_{b\to\infty}\int_a^b$ (o $\int_{-\infty}^c = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c$). Si los dos límites son infinitos, parte en un punto cómodo, como 0.
2. Calcula la antiderivada (Unidad 3A si hace falta) y comprueba derivándola.
3. Evalúa entre a y b y toma el límite. Recuerda: $e^{-b}\to 0$, $\ln b\to\infty$ y $\frac{1}{\ln b}\to 0$ si $b\to\infty$; $\operatorname{ang\,tan} b \to \pm\frac{\pi}{2}$ si $b\to\pm\infty$.
4. Concluye con palabras: «converge a…» o «diverge».

2.3.7 Integral impropia de integrando no acotado

1. Busca dónde se anula el denominador o dónde un ln se va a $-\infty$, y si ese punto está en un extremo o *dentro* del intervalo. Una integral con un punto malo interior parece una integral definida normal: es la trampa.
2. Extremo: $\int_a^b = \lim_{t\to a^+}\int_t^b$ (o $\lim_{t\to b^-}\int_a^t$).
3. Punto interior c: $\int_a^b = \lim_{t\to c^-}\int_a^t + \lim_{s\to c^+}\int_s^b$. Si una de las dos diverge, toda la integral diverge.
4. Antiderivada, comprobación por derivación, evaluación y límite, como en 2.3.6.

2.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · L'Hôpital, forma 1^∞

Adaptado de: 1er final 2011-2, tipo C, problema 2.

Calcule, si existe, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}$.

2. Sustituyendo:

$$I = \int \frac{4\cos\theta \cdot \frac{4}{3}\cos\theta}{\frac{256}{81}\operatorname{sen}^4\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{27}{16}\int \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^4\theta}\,\mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{27}{16}\int \cot^2\theta\csc^2\theta\,\mathrm{d}\theta = -\frac{9}{16}\cot^3\theta + C$$

   (con $w = \cot\theta$, $\mathrm{d}w = -\csc^2\theta\,\mathrm{d}\theta$).
3. Triángulo: hipotenusa 4, opuesto $3x$, adyacente $\sqrt{16-9x^2}$. Entonces $\cot\theta = \frac{\sqrt{16-9x^2}}{3x}$ y $\cot^3\theta = \frac{(16-9x^2)^{3/2}}{27x^3}$.
4. $\int \frac{\sqrt{16-9x^2}}{x^4}\mathrm{d}x = -\frac{(16-9x^2)^{3/2}}{48x^3} + C$. Comprobación:

$$\frac{27x^4\sqrt{16-9x^2} + 3x^2(16-9x^2)^{3/2}}{48x^6} = \frac{\sqrt{16-9x^2}\,(27x^2+48-27x^2)}{48x^4}$$
$$= \frac{\sqrt{16-9x^2}}{x^4}$$

Ejercicio 3A.5.6 · Sustitución trigonométrica con secante: $\sqrt{x^2-1}$

Adaptado de: 2º final 2018-1, problema 3, inciso b).

Efectúe $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,\mathrm{d}x$ (con $x > 1$).

Resolución.

1. Raíz de $x^2 - a^2$ con $a = 1$: $x = \sec\theta$, $\mathrm{d}x = \sec\theta\tan\theta\,\mathrm{d}\theta$, $\sqrt{x^2-1} = \tan\theta$.
2. Sustituyendo:

$$I = \int \frac{\tan\theta}{\sec\theta}\sec\theta\tan\theta\,\mathrm{d}\theta = \int \tan^2\theta\,\mathrm{d}\theta$$
$$= \int (\sec^2\theta - 1)\,\mathrm{d}\theta = \tan\theta - \theta + C$$

3. Triángulo: hipotenusa x, adyacente 1, opuesto $\sqrt{x^2-1}$; $\tan\theta = \sqrt{x^2-1}$, $\theta = \operatorname{ang\,sec} x$.
4. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\mathrm{d}x = \sqrt{x^2-1} - \operatorname{ang\,sec} x + C$. Comprobación:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{x^2-1}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

Ejercicio 3A.5.7 · Fracciones con un cuadrático repetido

Adaptado de: 1er extraordinario 2019-2, problema 3, inciso b).

Efectúe $\displaystyle\int \frac{2x^3+10x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

Resolución.

Ejemplo resuelto · L'Hôpital con hiperbólicas

Adaptado de: 2º final 2010-2, tipo A, problema 2.

Calcule, si existe, $\lim_{x\to 0^+}(\cosh x)^{1/\operatorname{senh} x}$.

Resolución.

1. $\cosh 0 = 1$ y $\frac{1}{\operatorname{senh} x} \to \infty$: forma 1^∞.
2. Sea $y = (\cosh x)^{1/\operatorname{senh} x}$; $\ln y = \dfrac{\ln\cosh x}{\operatorname{senh} x}$, de la forma $\frac{0}{0}$ ($\ln 1 = 0$, $\operatorname{senh} 0 = 0$).
3. L'Hôpital, con $(\ln\cosh x)' = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \tanh x$ y $(\operatorname{senh} x)' = \cosh x$:

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y = \lim_{x\to 0^+}\frac{\tanh x}{\cosh x} = \frac{0}{1} = 0.$$

4. $\lim_{x\to 0^+}(\cosh x)^{1/\operatorname{senh} x} = e^0 = 1$.
5. Comprobación con la regla rápida de 1^∞: $\frac{\cosh x - 1}{\operatorname{senh} x} \to 0$ (por L'Hôpital, $\frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \to 0$), así que el límite es e^0.

2.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 2.5.1 · Derivada con base variable: cambio de base

Adaptado de: 1er final 2010-1, tipo C, problema 2.

Calcule $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=2}$ si $y = \log_{e^x}(2x)^x$.

Resolución.

1. Cambio de base (para $x > 0$): $y = \dfrac{\ln(2x)^x}{\ln e^x} = \dfrac{x\ln 2x}{x} = \ln 2x$.
2. Derivada: $y' = \dfrac{2}{2x} = \dfrac{1}{x}$.
3. $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=2} = \dfrac{1}{2}$.

Ejercicio 2.5.2 · Derivación logarítmica de $x^{1/x}$

Adaptado de: 1er final 2010-2, tipo C, problema 2.

Obtenga $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}$ si $y = e^{\frac{\ln x}{x}}$.

Resolución.

1. Como $e^{\frac{\ln x}{x}} = \left(e^{\ln x}\right)^{1/x}$, la función es $y = x^{1/x}$: base y exponente variables.
2. Logaritmo: $\ln y = \dfrac{\ln x}{x}$.
3. Derivación implícita: $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$.
4. Despeje: $y' = x^{1/x}\,\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.
5. En $x = 1$: $y' = 1\cdot\dfrac{1-0}{1}$.

7. $x-3 = Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2$. Con $x=0$: $B=-3$. Con $x=-1$: $C=-4$. Coeficiente de x^2: $A+C=0 \Rightarrow A=4$.
8. **c)** $\int \frac{x-3}{x^3+x^2}\,dx = 4\ln|x| + \frac{3}{x} - 4\ln|x+1| + C$. Comprobación:

$$\frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x+1} = \frac{4x^2+4x-3x-3-4x^2}{x^2(x+1)} = \frac{x-3}{x^3+x^2}$$

3A.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 3A.5.1 · Partes cíclica: exponencial por seno

Adaptado de: 1er final 2010-2, tipo A, problema 4, inciso a).

Efectúe $\int e^{2x}\operatorname{sen} x\,dx$.

Resolución.

1. Partes con $u=\operatorname{sen} x$, $dv = e^{2x}dx$, $v=\frac{1}{2}e^{2x}$:

$$I = \tfrac{1}{2}e^{2x}\operatorname{sen} x - \tfrac{1}{2}\int e^{2x}\cos x\,dx$$

2. Otra vez partes, con el mismo tipo de u: $u=\cos x$, $v=\frac{1}{2}e^{2x}$:

$$\int e^{2x}\cos x\,dx = \tfrac{1}{2}e^{2x}\cos x + \tfrac{1}{2}I$$

3. Sustituyendo: $I = \frac{1}{2}e^{2x}\operatorname{sen} x - \frac{1}{4}e^{2x}\cos x - \frac{1}{4}I$, así que $\frac{5}{4}I = \frac{1}{4}e^{2x}(2\operatorname{sen} x - \cos x)$.
4. $\int e^{2x}\operatorname{sen} x\,dx = \frac{1}{5}e^{2x}(2\operatorname{sen} x - \cos x) + C$. Comprobación:

$$\tfrac{1}{5}e^{2x}\big[2(2\operatorname{sen} x - \cos x) + (2\cos x + \operatorname{sen} x)\big] = e^{2x}\operatorname{sen} x$$

Ejercicio 3A.5.2 · Partes con una inversa: $x\operatorname{ang\,sec} x$

Adaptado de: 2º extraordinario 2019-1, problema 3, inciso b).

Efectúe $\int x\operatorname{ang\,sec} x\,dx$ (con $x>1$).

Resolución.

1. LIATE: la inversa es u. $u=\operatorname{ang\,sec} x$, $du = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; $dv = x\,dx$, $v=\frac{x^2}{2}$.
2. Partes:

$$I = \frac{x^2}{2}\operatorname{ang\,sec} x - \frac{1}{2}\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

3. La integral que queda es inmediata con $w = x^2-1$: $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x^2-1}$.
4. $\int x\operatorname{ang\,sec} x\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{ang\,sec} x - \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} + C$. Comprobación:

$$x\operatorname{ang\,sec} x + \frac{x^2}{2x\sqrt{x^2-1}} - \frac{x}{2\sqrt{x^2-1}} = x\operatorname{ang\,sec} x$$

Resolución.

1. Base $\to\infty$, exponente $\to 0$: forma ∞^0.
2. Sea $y = \left(\frac{1}{x}\right)^x$: $\ln y = x\ln\frac{1}{x} = -x\ln x = -\dfrac{\ln x}{1/x}$, de la forma $\frac{\infty}{\infty}$.
3. L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y = -\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} x = 0.$$

4. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^x = e^0 = 1$.

Ejercicio 2.5.6 · Impropia con un punto malo interior

Adaptado de: 2º extraordinario 2015-1, problema 2.

Determine si la integral $\displaystyle\int_0^9 \frac{dx}{3\sqrt[3]{x-1}}$ converge o diverge.

Resolución.

1. El denominador se anula en $x=1$, que está *dentro* de $[0,9]$. Se parte:

$$\int_0^9 = \lim_{t\to 1^-}\int_0^t + \lim_{s\to 1^+}\int_s^9.$$

2. Antiderivada: $\int \frac{1}{3}(x-1)^{-1/3}\,dx = \frac{1}{2}(x-1)^{2/3} + C$. Comprobación: $\left[\frac{1}{2}(x-1)^{2/3}\right]' = \frac{1}{3}(x-1)^{-1/3}$.
3. Primera parte: $\lim_{t\to 1^-}\left[\frac{1}{2}(t-1)^{2/3} - \frac{1}{2}(-1)^{2/3}\right] = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, porque $(-1)^{2/3} = \left(\sqrt[3]{-1}\right)^2 = 1$.
4. Segunda parte: $\lim_{s\to 1^+}\left[\frac{1}{2}(8)^{2/3} - \frac{1}{2}(s-1)^{2/3}\right] = \frac{1}{2}(4) - 0 = 2$.
5. Las dos convergen: $-\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$.
6. **La integral converge y vale $\frac{3}{2}$.**

Ejercicio 2.5.7 · Impropia hacia $-\infty$: completar el cuadrado

Adaptado de: 1er final 2020-1, tipo A, problema 2.

Determine si la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2+2x+2}$ converge o diverge.

Resolución.

1. Completar el cuadrado: $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$. Antiderivada: $\operatorname{ang\,tan}(x+1)+C$. Comprobación: $\big[\operatorname{ang\,tan}(x+1)\big]' = \frac{1}{(x+1)^2+1}$.
2. Límite inferior infinito:

$$\lim_{a\to-\infty}\operatorname{ang\,tan}(x+1)\Big|_a^{-1} = \operatorname{ang\,tan} 0 - \lim_{a\to-\infty}\operatorname{ang\,tan}(a+1).$$

3. $\operatorname{ang\,tan} 0 = 0$ y $\operatorname{ang\,tan}(a+1) \to -\frac{\pi}{2}$: el resultado es $0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

1. Identifica a. Si la raíz es $\sqrt{16-9x^2}$, escribe $3x = 4\operatorname{sen}\theta$ (es decir, $u = 3x$, $a = 4$).
2. Si hay ax^2+bx+c, completa el cuadrado: $x^2+6x+18 = (x+3)^2+9$; haz $u = x+3$ y sigue con u.
3. Sustituye x, $\mathrm{d}x$ y la raíz; simplifica hasta una integral trigonométrica (casi siempre de potencias, 3A.3.2).
4. Integra en θ.
5. Regresa a x **con el triángulo**: dibuja el de tu caso (figura), pon x y a donde dice la sustitución y lee $\operatorname{sen}\theta$, $\tan\theta$, $\cot\theta$… como cociente de lados. El ángulo solo se escribe con su inversa: $\theta = \operatorname{ang\,sen}\frac{x}{a}$, $\operatorname{ang\,tan}\frac{x}{a}$ o $\operatorname{ang\,sec}\frac{x}{a}$.

3A.3.4 Fracciones parciales

1. **Compara grados.** Si el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador, divide: $\frac{P}{Q} = \text{cociente} + \frac{\text{residuo}}{Q}$.
2. **Factoriza el denominador** en factores lineales y cuadráticos irreducibles. Para una cúbica, prueba raíces enteras que dividan al término independiente ($\pm1, \pm2, \ldots$) y divide.
3. **Escribe la descomposición:**
   - cada $(x-r)$ distinto da $\frac{A}{x-r}$;
   - un $(x-r)^k$ repetido da $\frac{A_1}{x-r} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-r)^k}$;
   - cada cuadrático irreducible x^2+px+q da $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$; si está al cuadrado, también $\frac{Dx+E}{(x^2+px+q)^2}$.
4. **Obtén las constantes.** Multiplica por el denominador. Sustituye las raíces reales (cada una da una constante al instante: método de «tapar»); para las que falten, iguala coeficientes de x^2 o del término independiente, o sustituye un valor sencillo como $x = 0$.
5. **Integra cada término:**

$$\int \frac{A\,\mathrm{d}x}{x-r} = A\ln|x-r|, \qquad \int \frac{A\,\mathrm{d}x}{(x-r)^2} = -\frac{A}{x-r},$$
$$\int \frac{Bx+C}{x^2+q}\,\mathrm{d}x = \frac{B}{2}\ln(x^2+q) + \frac{C}{\sqrt{q}}\operatorname{ang\,tan}\frac{x}{\sqrt{q}}.$$

6. Junta los logaritmos si quieres ($\ln|x-1| - \ln|x-2| = \ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|$) y comprueba derivando o sumando las fracciones.

Atajo. Antes de descomponer, revisa si el numerador es la derivada del denominador, o casi: $\int \frac{2x+1}{x^2+x-2}\mathrm{d}x = \ln|x^2+x-2| + C$ sale con $u = x^2+x-2$.

3A.3.5 Sustituciones diversas

1. Busca la parte «incómoda» del integrando (una raíz de x, una exponencial dentro de una raíz, un $\ln x$ o un $\frac{1}{x}$ dentro de otra función) y llámala u.
2. Despeja x y $\mathrm{d}x$ en términos de u, o identifica $\mathrm{d}u$ en el integrando.
3. Sustituye todo: no debe quedar ninguna x. Lo que queda suele ser una integral inmediata, racional (3A.3.4), de partes (3A.3.1) o de sustitución trigonométrica (3A.3.3).
4. Regresa a x y comprueba derivando.

Ejercicio propuesto 2.6.3

Adaptado de: 2º extraordinario 2011-2, problema 2.

Calcule, si existe, $\lim_{x\to\infty} 4x\,\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2x}\right)$.

Resultado: 2.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 100.

Ejercicio propuesto 2.6.4

Adaptado de: 2º extraordinario 2010-1, tipo A, problema 2.

Calcule, de ser posible, $\displaystyle\int_5^6 \frac{\ln(x-5)}{2x-10}\,\mathrm{d}x$.

Resultado: La integral diverge (tiende a $-\infty$).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 100.

Ejercicio propuesto 2.6.5

Adaptado de: 2º final 2016-1, tipo A, problema 2.

Calcule $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$ si $y = \log_2\left(\frac{e^{\operatorname{sen}x}}{2}\right)$.

Resultado: $\frac{1}{\ln 2}$ (≈ 1.44).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 101.

Ejercicio propuesto 2.6.6

Adaptado de: 1er extraordinario 2016-2, problema 2.

Calcule, si existe, $\lim_{x\to0^+}(1-\operatorname{senh}x)^{\coth x}$.

Resultado: e^{-1}.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 101.

2.7 Errores frecuentes

- **Usar L'Hôpital sin forma indeterminada.** Antes de derivar, sustituye y escribe la forma. $\frac{1}{0^+}$ no es indeterminada: es ∞.
- **Derivar con la regla del cociente.** En L'Hôpital se derivan el numerador y el denominador por separado.
- **Olvidar regresar del logaritmo.** En 1^∞, 0^0 e ∞^0 se calcula $\lim \ln y = L$; la respuesta es e^L, no L.
- **Creer que** $1^\infty = 1$**.** Es indeterminada: $\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x} \to e^6$.
- **Signos en las hiperbólicas.** $(\cosh x)' = \operatorname{senh}x$, sin el signo menos del coseno; $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$, con resta.
- **No ver el punto malo interior.** $\int_0^9 \frac{\mathrm{d}x}{3\sqrt[3]{x-1}}$ parece normal, pero en $x = 1$ el integrando no está acotado: hay que partir en dos.
- **Declarar que converge sin tomar el límite.** Si $F(b) \to \infty$, la integral diverge, aunque la antiderivada esté bien.

Unidad 3 · Parte A · Métodos de integración: partes, sustitución trigonométrica y fracciones parciales

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno adquirirá habilidad en el uso de diversas técnicas de integración y las aplicará en la resolución de problemas geométricos. El programa de 2016 dice lo mismo con otras palabras: «El alumno aplicará métodos de integración y los utilizará en la resolución de problemas geométricos».

Instrucciones de emergencia

- **Plan:** los dos. Los métodos son los temas 3.1 a 3.4 del Plan 2010 y 3.1 a 3.3 del Plan 2016. El Plan 2016 no nombra las «sustituciones diversas» (tema 3.4 del Plan 2010), pero esas integrales salen en 20 de sus 60 exámenes.
- **Frecuencia:** es el problema 3 (tres integrales, una por método) en los 52 exámenes del Plan 2010 y en los 60 del Plan 2016. Incisos por método en el Plan 2010: fracciones parciales 50, sustitución trigonométrica 35, por partes 34, otras sustituciones 23 y potencias trigonométricas 3. En el Plan 2016: fracciones parciales 51, por partes 43, sustitución trigonométrica 35, otras sustituciones 20 y potencias trigonométricas 9.
- **Tiempo:** de 6 a 8 horas para esta parte. Es la que más rinde: vale un sexto del examen por sí sola y es la base de la Parte B, de la integral impropia y de Cálculo Vectorial.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la tabla de la sección 3A.2 y la de integrales inmediatas de la 3A.1 (30 min).
  2. Lee los procedimientos 3A.3.1, 3A.3.3 y 3A.3.4 (partes, sustitución trigonométrica y fracciones: la terna típica).
  3. Sigue el ejemplo 3A.4 tapando la resolución.
  4. Resuelve los ejercicios 3A.5 con cronómetro (8 min cada integral) y comprueba cada resultado derivando.

3A.1 Conceptos y expresiones

Integral indefinida. $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ quiere decir que $F'(x) = f(x)$. Por eso toda integral indefinida se *comprueba derivando*: si la derivada del resultado no regresa al integrando, hay un error. En este libro cada integral termina con esa comprobación en una línea.

Cambio de variable. Si $u = g(x)$, entonces $du = g'(x)\,dx$ y

$$\int f\big(g(x)\big)\,g'(x)\,dx = \int f(u)\,du.$$

Todos los métodos de esta unidad terminan en una integral inmediata, casi siempre después de un cambio de variable. Al final se regresa a x.

3A.3 Procedimientos

3A.3.1 Integración por partes

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

1. Elige u con el orden **LIATE**: Logaritmo, Inversa trigonométrica, Algebraica (polinomio), Trigonométrica, Exponencial. La primera que aparezca en el integrando es u; el resto, con dx, es dv.
2. Escribe el cuadro: u, $du = u'\,dx$, dv, $v = \int dv$ (sin constante).
3. Aplica la fórmula. La nueva integral $\int v\,du$ debe ser más sencilla; si no lo es, cambia la elección.
4. Si queda otra vez un producto de polinomio por exponencial o trigonométrica, repite partes (una vez por cada grado del polinomio).
5. **Integral cíclica** ($e^{ax}\operatorname{sen} bx$, $\operatorname{sen}(\ln x)$): aplica partes dos veces *con el mismo tipo de u*. Reaparece la integral original I; despéjala como una incógnita: $I = \cdots - kI \Rightarrow (1+k)I = \ldots$
6. Con $\ln x$ o una inversa sola, toma $dv = dx$, $v = x$.

Las que hay que saber.

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$$

$$\int \operatorname{ang\,tan} x\,dx = x\operatorname{ang\,tan} x - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

$$\int \operatorname{ang\,sen} x\,dx = x\operatorname{ang\,sen} x + \sqrt{1-x^2} + C$$

Con $\operatorname{ang\,sec} x$ (para $x > 1$): $u = \operatorname{ang\,sec} x$, $du = \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; la integral que queda es algebraica (ejercicio de la sección 3A.5).

3A.3.2 Potencias trigonométricas

En el examen de Cálculo Integral salen poco (3 incisos en el Plan 2010 y 9 en el Plan 2016), pero Cálculo Vectorial las usa en casi todas las integrales de línea, de superficie y en polares. Vale la pena dominarlas.

$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$**.**

1. Si m es impar, separa un $\operatorname{sen} x$, pasa el resto a cosenos con $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ y usa $u = \cos x$.
2. Si n es impar, separa un $\cos x$, pasa el resto a senos con $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ y usa $u = \operatorname{sen} x$.
3. Si los dos son pares, baja las potencias con $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ y $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$; repite si hace falta.

El enunciado dice…	Procedimiento
«Determinar si la integral converge o diverge» con ∞ en un límite	Impropia de límite infinito (2.3.6)
Integral definida cuyo integrando se va a infinito en un extremo o dentro del intervalo	Impropia de integrando no acotado (2.3.7)

2.3 Procedimientos

2.3.1 Derivada de logaritmos y exponenciales; derivación logarítmica SOLO PLAN 2010

1. Si hay $\log_a$ (aunque la base dependa de x), cambia a ln: $\log_a u = \frac{\ln u}{\ln a}$.
2. Simplifica con las propiedades *antes* de derivar: $\ln e^u = u$, $\ln u^r = r \ln u$, $\ln \frac{u}{v} = \ln u - \ln v$. Muchas veces la función queda muy sencilla.
3. Deriva con la regla de la cadena: $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, $(e^u)' = e^u u'$, $(a^u)' = a^u \ln a \; u'$, $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$.
4. Si la función es $y = f(x)^{g(x)}$ (base y exponente variables), toma ln en los dos lados, $\ln y = g \ln f$, deriva implícitamente y despeja:

$$y' = f^{\,g}\Big(g' \ln f + g\,\frac{f'}{f}\Big).$$

5. Evalúa en el punto pedido al final.

2.3.2 Funciones hiperbólicas SOLO PLAN 2010

1. Derivadas: $(\operatorname{senh} u)' = \cosh u \; u'$; $(\cosh u)' = \operatorname{senh} u \; u'$ (sin signo menos); $(\tanh u)' = \operatorname{sech}^2 u \; u'$; $(\coth u)' = -\operatorname{csch}^2 u \; u'$; $(\operatorname{sech} u)' = -\operatorname{sech} u \tanh u \; u'$; $(\operatorname{csch} u)' = -\operatorname{csch} u \coth u \; u'$.
2. Integrales: las mismas fórmulas al revés, por ejemplo $\int \operatorname{senh} u \, du = \cosh u + C$ y $\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \tanh u + C$.
3. Inversas: $(\operatorname{ang\,senh} u)' = \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$; $(\operatorname{ang\,cosh} u)' = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$; $(\operatorname{ang\,tanh} u)' = \frac{u'}{1-u^2}$. Al integrar, el resultado puede darse con ang senh o con su forma logarítmica.
4. Si una expresión mezcla e^x y e^{-x}, reescríbela con las definiciones ($e^x + e^{-x} = 2\cosh x$) o multiplica por e^x. Por ejemplo,

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1} = \operatorname{ang\,tan} e^x + C.$$

5. En un límite, sustituye primero $\operatorname{senh} 0 = 0$ y $\cosh 0 = 1$ para saber qué forma indeterminada es.

2.3.3 L'Hôpital: formas $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$

1. Sustituye el valor: confirma que da $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Escríbelo, porque sin forma indeterminada la regla no se aplica.
2. Deriva el numerador y el denominador por separado.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

Ejercicio propuesto 3A.6.3

Adaptado de: 2º final 2015-2, tipo B, problema 3, inciso a).

Efectúe $\int (\tan x - \sec x)^2 \, dx$.

Resultado: $2\tan x - 2\sec x - x + C$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

Ejercicio propuesto 3A.6.4

Adaptado de: 2º final 2020-1, problema 3, inciso c).

Efectúe $\int \frac{x \operatorname{sen}^2(x^2)}{\sec(x^2)} \, dx$.

Resultado: $\frac{1}{6}\operatorname{sen}^3(x^2) + C$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

Ejercicio propuesto 3A.6.5

Adaptado de: 2º extraordinario 2012-2, problema 3, inciso a).

Efectúe $\int \frac{dx}{\sqrt{\left[(x+3)^2+9\right]^3}}$.

Resultado: $\frac{x+3}{9\sqrt{(x+3)^2+9}} + C$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 102.

Ejercicio propuesto 3A.6.6

Adaptado de: 2º extraordinario 2019-1, problema 3, inciso c).

Efectúe $\int \frac{e^x\,dx}{(e^{2x}+1)(e^x-1)}$.

Resultado: $\frac{1}{2}\ln|e^x - 1| - \frac{1}{4}\ln(e^{2x}+1) - \frac{1}{2}\operatorname{ang\,tan} e^x + C$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 103.

Ejercicio propuesto 3A.6.7

Adaptado de: 1er final 2018-2, tipo A, problema 3, inciso c).

Efectúe $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$.

Resultado: $-\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + C$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 103.

Resolución.

1. Al sustituir, la base tiende a 1 y el exponente a ∞: forma 1^{∞}.
2. Sea $y = \left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}$. Entonces

$$\ln y = 3x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{3x}},$$

   de la forma $\frac{0}{0}$.
3. Derivadas: $\left[\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right]' = \dfrac{-2/x^2}{1+2/x}$ y $\left[\frac{1}{3x}\right]' = -\dfrac{1}{3x^2}$.
4. L'Hôpital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\ln y &= \lim_{x\to\infty}\frac{-2/x^2}{1+2/x}\cdot\left(-3x^2\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{6}{1+2/x} = 6.\end{aligned}$$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x} = e^6$.
6. Comprobación con la fórmula de e: $\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}\to e^{ab}$ con $a=2$ y $b=3$.

Ejemplo resuelto · Integral impropia que converge

Adaptado de: 2º final 2015-2, tipo B, problema 2.

Determine si la integral $\displaystyle\int_e^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2}$ converge o diverge.

Resolución.

1. El límite superior es infinito:

$$\int_e^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2} = \lim_{b\to\infty}\int_e^{b}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2}.$$

2. Cambio de variable $u=\ln x$, $\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}$:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2} = \int u^{-2}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{\ln x}+C.$$

   Comprobación: $\left(-\frac{1}{\ln x}\right)' = \frac{1}{(\ln x)^2}\cdot\frac{1}{x}$.
3. Evaluación:

$$\begin{aligned}\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Big|_e^{b} &= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln b}+\frac{1}{\ln e}\right)\\ &= 0+1.\end{aligned}$$

4. **La integral converge y vale 1.** Es el área de la región sombreada de la figura de 2.1.4.

1. Racional propia (grado 3 contra grado 4); x^2+1 es irreducible y está al cuadrado:

$$\frac{2x^3+10x}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

2. $2x^3+10x = (Ax+B)(x^2+1)+Cx+D = Ax^3+Bx^2+(A+C)x+(B+D)$. Igualando coeficientes: $A=2$, $B=0$, $A+C=10\Rightarrow C=8$, $D=0$.
3. $\int\frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \ln(x^2+1)$ y $\int\frac{8x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = -\frac{4}{x^2+1}$ (las dos con $u=x^2+1$).
4. $\int\frac{2x^3+10x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \ln(x^2+1)-\frac{4}{x^2+1}+C$. Comprobación:

$$\frac{2x}{x^2+1}+\frac{8x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3+2x+8x}{(x^2+1)^2}$$

Otra vía, más corta: con $u=x^2+1$, $x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}u$ y $2x^2+10=2u+8$, la integral es $\int\left(\frac{1}{u}+\frac{4}{u^2}\right)\mathrm{d}u$.

Ejercicio 3A.5.8 · Fracción impropia: dividir primero

Adaptado de: 2º extraordinario 2011-1, problema 4, inciso b).

Efectúe $\displaystyle\int\frac{x^3-x+3}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x$.

Resolución.

1. Grado 3 contra grado 2: se divide. Cociente $x-1$, residuo $2x+1$:

$$\frac{x^3-x+3}{x^2+x-2} = x-1+\frac{2x+1}{x^2+x-2}$$

   (se comprueba con $(x-1)(x^2+x-2)+2x+1 = x^3-x+3$).
2. $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$ y $2x+1=A(x-1)+B(x+2)$. Con $x=1$: $B=1$; con $x=-2$: $A=1$. (También sirve el atajo: $2x+1$ es la derivada de x^2+x-2.)
3. $\int\frac{x^3-x+3}{x^2+x-2}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}-x+\ln|x+2|+\ln|x-1|+C$. Comprobación:

$$x-1+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-1} = x-1+\frac{2x+1}{x^2+x-2}$$

Ejercicio 3A.5.9 · Fracciones con un factor lineal repetido

Adaptado de: 1er extraordinario 2015-1, problema 3, inciso b).

Efectúe $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3-5x^2+8x-4}$.

Resolución.

1. Raíces enteras de la cúbica: $x=1$ la anula ($1-5+8-4=0$). Al dividir entre $x-1$ queda $x^2-4x+4=(x-2)^2$. Así, $x^3-5x^2+8x-4=(x-1)(x-2)^2$.
2. Descomposición:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$$

6. $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 1$.

Ejercicio 2.5.3 · Forma 0^0 con seno hiperbólico

Adaptado de: 2º extraordinario 2011-1, problema 3.

Calcule, si existe, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\operatorname{senh} x}$.

Resolución.

1. El enunciado original escribe $x \to 0$; como $x^{\operatorname{senh} x}$ solo está definida para $x > 0$, el límite es por la derecha. Al sustituir, la base y el exponente tienden a 0: forma 0^0.
2. Sea $y = x^{\operatorname{senh} x}$: $\ln y = \operatorname{senh} x \ln x = \dfrac{\ln x}{\operatorname{csch} x}$, de la forma $\frac{-\infty}{\infty}$.
3. L'Hôpital, con $(\operatorname{csch} x)' = -\operatorname{csch} x \coth x$:

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-\operatorname{csch} x \coth x} = \lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{\operatorname{senh}^2 x}{x \cosh x}\right).$$

4. Se separa: $-\dfrac{\operatorname{senh} x}{x} \cdot \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \to -1 \cdot \dfrac{0}{1} = 0$ (por L'Hôpital, $\frac{\operatorname{senh} x}{x} \to \frac{\cosh 0}{1} = 1$).
5. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\operatorname{senh} x} = e^0 = 1$.

Ejercicio 2.5.4 · Forma $\infty - \infty$: L'Hôpital dos veces

Adaptado de: 1er final 2016-1, tipo A, problema 2.

Calcule, si existe, $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$.

Resolución.

1. Cerca de 1, las dos fracciones crecen sin límite: forma $\infty - \infty$. Común denominador:

$$\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1)\ln x},$$

   de la forma $\frac{0}{0}$.
2. L'Hôpital: numerador $\ln x + 1 - 1 = \ln x$; denominador $\ln x + \frac{x-1}{x} = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$. Sigue $\frac{0}{0}$.
3. Otra vez: numerador $\frac{1}{x}$; denominador $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1/x}{1/x + 1/x^2} = \frac{1}{1+1}.$$

4. **El límite vale $\frac{1}{2}$.**

Ejercicio 2.5.5 · Forma ∞^0

Adaptado de: 1er final 2018-2, tipo C, problema 2.

Determine, si existe, $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^x$.

Ejercicio 3A.5.3 · Potencia impar de la tangente

Adaptado de: 1er final 2018-1, tipo C, problema 3, inciso a).

Efectúe $\displaystyle\int \tan^3 x \, dx$.

Resolución.

1. Solo hay tangentes: se convierte un $\tan^2 x$ en $\sec^2 x - 1$.

$$\int \tan^3 x \, dx = \int \tan x \sec^2 x \, dx - \int \tan x \, dx$$

2. La primera es inmediata con $u = \tan x$, $du = \sec^2 x \, dx$: $\frac{1}{2}\tan^2 x$. La segunda es $-\ln|\cos x|$.
3. $\int \tan^3 x \, dx = \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$. Comprobación: $\tan x \sec^2 x - \tan x = \tan x(\sec^2 x - 1) = \tan^3 x$.

Ejercicio 3A.5.4 · Cociente de potencias con exponente fraccionario

Adaptado de: 1er final 2010-1, tipo C, problema 3, inciso c).

Efectúe $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^7 x}}\, dx$.

Resolución.

1. Se escribe como $\tan^m x \sec^n x$: $\cos^7 x = \cos x \cdot \cos^6 x$, así que

$$\sqrt[3]{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^7 x}} = \sqrt[3]{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \tan^{1/3} x \sec^2 x$$

2. Hay $\sec^2 x$ (exponente par): $u = \tan x$, $du = \sec^2 x \, dx$.

$$\int u^{1/3} \, du = \tfrac{3}{4} u^{4/3}$$

3. $\int \sqrt[3]{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^7 x}}\, dx = \frac{3}{4}\tan^{4/3} x + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{\tan^4 x} + C$. Comprobación: $\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}\tan^{1/3} x \sec^2 x = \tan^{1/3} x \sec^2 x$.

Ejercicio 3A.5.5 · Sustitución trigonométrica con seno: $\sqrt{16 - 9x^2}$

Adaptado de: 2º final 2011-1, tipo A, problema 3, inciso a).

Efectúe $\displaystyle\int \frac{\sqrt{16 - 9x^2}}{x^4}\, dx$.

Resolución.

1. Raíz de $a^2 - u^2$ con $u = 3x$, $a = 4$: $3x = 4\operatorname{sen}\theta$, $dx = \frac{4}{3}\cos\theta \, d\theta$, $\sqrt{16 - 9x^2} = 4\cos\theta$, $x^4 = \frac{256}{81}\operatorname{sen}^4\theta$.

4. **La integral converge y vale $\frac{\pi}{2}$.**

Ejercicio 2.5.8 · Impropia con integrando no acotado en un extremo

Adaptado de: 1er final 2019-1, tipo A, problema 2.

Determine si la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ converge o diverge.

Resolución.

1. En $x=0$ el denominador se anula: $\displaystyle\int_0^1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1$.
2. Cambio de variable $u=\sqrt{x}+1$, $\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}$:

$$\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int u^{1/2}\,\mathrm{d}u = \frac{4}{3}\big(\sqrt{x}+1\big)^{3/2}+C.$$

   Comprobación: $\left[\frac{4}{3}(\sqrt{x}+1)^{3/2}\right]' = 2(\sqrt{x}+1)^{1/2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
3. Evaluación:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{4}{3}\,2^{3/2}-\frac{4}{3}\big(\sqrt{\varepsilon}+1\big)^{3/2}\right] = \frac{4}{3}\big(2\sqrt{2}-1\big).$$

4. **La integral converge y vale $\frac{4}{3}\big(2\sqrt{2}-1\big)=\frac{8\sqrt{2}-4}{3}$ (≈ 2.44).**

2.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.2**.

Ejercicio propuesto 2.6.1

Adaptado de: 2º final 2020-1, problema 2.

Calcule, si existe, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(x+\cos x)^{\csc x}$.

Resultado: e.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 100.

Ejercicio propuesto 2.6.2

Adaptado de: 2º final 2017-1, problema 2.

Calcule, si existe, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)$.

Resultado: $-\frac{1}{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 100.

Sustitución	Ejemplo
$u=\sqrt{x}$, $x=u^2$, $\mathrm{d}x=2u\,\mathrm{d}u$	$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}=\int\frac{2u\,\mathrm{d}u}{1+u}=2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C$
$u=e^x$, $\mathrm{d}u=e^x\mathrm{d}x$	$\int\frac{e^x\mathrm{d}x}{1+e^{2x}}=\int\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\operatorname{ang\,tan}e^x+C$
$u=\ln x$, $\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}$	$\int\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int u\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$
$u=\frac{1}{x}$, $\mathrm{d}u=-\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$	$\int\frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=-\int\operatorname{sen}u\,\mathrm{d}u=\cos\frac{1}{x}+C$
$u=x^2$, $\mathrm{d}u=2x\,\mathrm{d}x$	$\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^4}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\frac{1}{2}\operatorname{ang\,tan}x^2+C$

3A.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · La terna típica: partes, sustitución trigonométrica y fracciones

Adaptado de: 2º final 2011-2, tipo A, problema 3.

Efectúe las integrales:

$$\text{a)}\ \int x\cos 2x\,\mathrm{d}x \qquad \text{b)}\ \int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{c)}\ \int\frac{x-3}{x^3+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Resolución.

1. a) Polinomio por coseno: partes con $u=x$, $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$; $\mathrm{d}v=\cos 2x\,\mathrm{d}x$, $v=\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x$.

$$\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x=\tfrac{1}{2}x\operatorname{sen}2x-\tfrac{1}{2}\int\operatorname{sen}2x\,\mathrm{d}x$$

2. **a)** $\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x\operatorname{sen}2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$**.** Comprobación: $\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x+x\cos 2x-\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x=x\cos 2x$.
3. b) Raíz de $1-x^2$: $x=\operatorname{sen}\theta$, $\mathrm{d}x=\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$, $\sqrt{1-x^2}=\cos\theta$.

$$\int\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=\int\cot^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\int(\csc^2\theta-1)\,\mathrm{d}\theta=-\cot\theta-\theta+C$$

4. Del triángulo (hipotenusa 1, opuesto x, adyacente $\sqrt{1-x^2}$): $\cot\theta=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $\theta=\operatorname{ang\,sen}x$.
5. **b)** $\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\operatorname{ang\,sen}x+C$**.** Comprobación:

$$\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-x^2}{x^2\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}$$

6. c) Racional propia; $x^3+x^2=x^2(x+1)$, con x repetido:

$$\frac{x-3}{x^2(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}$$

- **Derivar $\log_{e^x}$ sin cambiar de base.** Primero $\log_a u = \dfrac{\ln u}{\ln a}$ y simplificar; casi siempre queda algo sencillo.

2.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$; $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$; $\ln a^r = r \ln a$; $e^{\ln x} = x$; $\ln e^x = x$.
- $a^x = e^{x \ln a}$; $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.
- $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$; $(e^u)' = e^u u'$; $(a^u)' = a^u \ln a\, u'$; $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$.
- $\displaystyle\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$; $\displaystyle\int e^u\,du = e^u + C$; $\displaystyle\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C$.
- $y = f^{\,g}$: $y' = f^{\,g}\big(g' \ln f + g \dfrac{f'}{f}\big)$.
- $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$; $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$; $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$; $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$.
- $(\operatorname{senh} u)' = \cosh u\, u'$; $(\cosh u)' = \operatorname{senh} u\, u'$; $(\tanh u)' = \operatorname{sech}^2 u\, u'$.
- $\operatorname{ang\,senh} x = \ln\big(x + \sqrt{x^2+1}\big)$; $\operatorname{ang\,cosh} x = \ln\big(x + \sqrt{x^2-1}\big)$; $\operatorname{ang\,tanh} x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.
- L'Hôpital ($\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$): $\lim \dfrac{f}{g} = \lim \dfrac{f'}{g'}$.
- $y = f^{\,g}$: $\lim y = e^{\lim g \ln f}$; $\lim_{x\to\infty}\big(1 + \frac{a}{x}\big)^{bx} = e^{ab}$.
- $\int_a^\infty f = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f$. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ converge si $p > 1$; $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$, si $p < 1$.

2.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Límite: sustituye y escribe la forma indeterminada antes de cualquier otra cosa.
2. Potencia $f^{\,g}$: toma ln, pasa a cociente, aplica L'Hôpital y termina con e^L.
3. Integral: revisa los límites ($\pm\infty$) y los ceros del denominador dentro del intervalo; escribe el límite antes de integrar.
4. Deriva la antiderivada para comprobarla y concluye «converge a…» o «diverge».
5. Derivadas con $\log_a$: cambio de base, simplifica y después deriva.

Ejemplos:

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x\,dx &= \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)\cos x\,dx \\ &= \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C\end{aligned}$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$$

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\,dx &= \tfrac{1}{4}\int \operatorname{sen}^2 2x\,dx \\ &= \tfrac{1}{8}x - \tfrac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C\end{aligned}$$

$\int \tan^m x \sec^n x\,dx$.

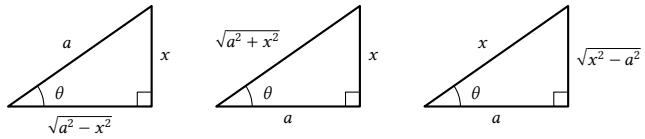
1. Si n es par, separa un $\sec^2 x$, pasa el resto a tangentes con $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ y usa $u = \tan x$. Ejemplo:

$$\begin{aligned}\int \tan^2 x \sec^4 x\,dx &= \int \tan^2 x(1 + \tan^2 x)\sec^2 x\,dx \\ &= \tfrac{1}{3}\tan^3 x + \tfrac{1}{5}\tan^5 x + C\end{aligned}$$

2. Si m es impar, separa $\sec x \tan x$, pasa el resto a secantes con $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ y usa $u = \sec x$.
3. Si solo hay tangentes, convierte un $\tan^2 x$ en $\sec^2 x - 1$ y repite (ejercicio de la sección 3A.5).
4. Si el integrando es un cociente de senos y cosenos, escríbelo como $\tan^m x \sec^n x$: $\dfrac{\operatorname{sen}^a x}{\cos^b x} = \tan^a x \sec^{b-a} x$. Sirve también con exponentes fraccionarios.

También conviene saber $\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\big(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|\big) + C$ (por partes, cíclica): aparece al final de varias sustituciones trigonométricas y en longitud de arco.

3A.3.3 Sustitución trigonométrica



Raíz	Sustitución y lo que queda
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\operatorname{sen}\theta$, $dx = a\cos\theta\,d\theta$, $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos\theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a\tan\theta$, $dx = a\sec^2\theta\,d\theta$, $\sqrt{a^2 + x^2} = a\sec\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\sec\theta$, $dx = a\sec\theta\tan\theta\,d\theta$, $\sqrt{x^2 - a^2} = a\tan\theta$

Integrales inmediatas. Hay que saberlas de memoria: en el examen no se permite formulario.

Integral	Resultado (más C)
$\int u^n\,du,\ n\neq -1$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
$\int \dfrac{du}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$
$\int e^u\,du$	e^u
$\int \operatorname{sen} u\,du;\ \int \cos u\,du$	$-\cos u;\ \operatorname{sen} u$
$\int \sec^2 u\,du;\ \int \csc^2 u\,du$	$\tan u;\ -\cot u$
$\int \sec u\tan u\,du$	$\sec u$
$\int \csc u\cot u\,du$	$-\csc u$
$\int \tan u\,du$	$-\ln\lvert\cos u\rvert = \ln\lvert\sec u\rvert$
$\int \cot u\,du$	$\ln\lvert\operatorname{sen} u\rvert$
$\int \sec u\,du$	$\ln\lvert\sec u+\tan u\rvert$
$\int \csc u\,du$	$\ln\lvert\csc u-\cot u\rvert$
$\int \dfrac{du}{a^2+u^2}$	$\dfrac{1}{a}\operatorname{ang\,tan}\dfrac{u}{a}$
$\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$	$\operatorname{ang\,sen}\dfrac{u}{a}$
$\int \dfrac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}}$	$\dfrac{1}{a}\operatorname{ang\,sec}\dfrac{u}{a}$ (con $u>a>0$)
$\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}}$	$\ln\left\lvert u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right\rvert$

Identidades trigonométricas que se usan.

$$\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1,\qquad 1+\tan^2 x=\sec^2 x,$$
$$1+\cot^2 x=\csc^2 x,\qquad \operatorname{sen} 2x=2\operatorname{sen} x\cos x,$$
$$\operatorname{sen}^2 x=\tfrac{1}{2}(1-\cos 2x),\qquad \cos^2 x=\tfrac{1}{2}(1+\cos 2x).$$

Valor absoluto y constante. El logaritmo lleva valor absoluto: $\int \frac{dx}{x-2}=\ln\lvert x-2\rvert+C$. Dos resultados que difieren en una constante son los dos correctos: $\ln\lvert x^2+x-2\rvert$ y $\ln\lvert x+2\rvert+\ln\lvert x-1\rvert$ son la misma antiderivada; $2\operatorname{ang\,sec}\sqrt{e^x}$ y $2\operatorname{ang\,tan}\sqrt{e^x-1}$ también.

Los cinco métodos. *Por partes* (3A.3.1) para productos de funciones de distinto tipo; *potencias trigonométricas* (3A.3.2) para $\operatorname{sen}^m x\cos^n x$ y $\tan^m x\sec^n x$; *sustitución trigonométrica* (3A.3.3) para raíces de a^2-x^2, a^2+x^2 y x^2-a^2; *fracciones parciales* (3A.3.4) para cocientes de polinomios; *sustituciones diversas* (3A.3.5) para raíces de x, exponenciales y logaritmos dentro de otra función. Muchas integrales de examen combinan dos: primero un cambio de variable y después uno de los otros cuatro.

3A.2 Cómo reconocer el problema

El enunciado siempre dice «Efectuar las integrales» (o «Efectúa»); lo que decide el método es la **forma del integrando**. Revisa los renglones en este orden: el primero que encaje es el método.

El integrando tiene…	Procedimiento
Una función $g(x)$ y, multiplicando, su derivada (salvo una constante): $x\cos x^2$, $\frac{\ln x}{x}$, $\frac{2x+1}{x^2+x-2}$	Cambio de variable $u=g(x)$ (3A.3.5)
Un cociente de polinomios $\frac{P(x)}{Q(x)}$	Fracciones parciales (3A.3.4); si el grado de P es mayor o igual que el de Q, divide primero
$\frac{1}{ax^2+bx+c}$ sin raíces reales	Completa el cuadrado y usa ang tan (3A.3.3)
$\sqrt{a^2-x^2}$ (sola, en un cociente o elevada a $\frac{3}{2}$)	$x=a\operatorname{sen}\theta$ (3A.3.3)
$\sqrt{a^2+x^2}$ o $(x^2+a^2)^{3/2}$	$x=a\tan\theta$ (3A.3.3)
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec\theta$ (3A.3.3)
$\sqrt{ax^2+bx+c}$	Completa el cuadrado y después uno de los tres anteriores (3A.3.3)
Polinomio por e^{ax}, $\operatorname{sen} ax$ o $\cos ax$	Partes con $u=$ polinomio (3A.3.1)
Polinomio (o nada) por $\ln x$, ang tan x, ang sen x, ang sec x	Partes con $u=$ el logaritmo o la inversa (3A.3.1)
$e^{ax}\operatorname{sen} bx$, $e^{ax}\cos bx$, $\operatorname{sen}(\ln x)$, $\cos(\ln x)$	Partes dos veces: integral cíclica (3A.3.1)
$\operatorname{sen}^m x\cos^n x$ con un exponente impar	Separa un factor y usa $\operatorname{sen}^2+\cos^2=1$ (3A.3.2)
$\operatorname{sen}^m x\cos^n x$ con los dos exponentes pares	Ángulo doble (3A.3.2)
$\tan^m x\sec^n x$, $(\tan x-\sec x)^2$, cocientes de seno y coseno	Pasa a tan y sec y usa $1+\tan^2=\sec^2$ (3A.3.2)
$\sqrt{x}$, $\sqrt{x+1}$ o $\sqrt[3]{x}$ dentro de otra función	$u=\sqrt{x}$ (o la raíz que aparezca) (3A.3.5)
e^x dentro de una raíz o de un cociente	$u=e^x$ o $u=\sqrt{e^x-1}$ (3A.3.5)
$\ln x$ junto con $\frac{dx}{x}$	$u=\ln x$ (3A.3.5)
$\frac{1}{x}$ dentro de otra función y $\frac{dx}{x^2}$ o $\frac{dx}{x^3}$	$u=\frac{1}{x}$ (3A.3.5)

La terna típica. En 50 de los 52 exámenes del Plan 2010 un inciso es de fracciones parciales; los otros dos suelen ser uno por partes y uno de sustitución trigonométrica. Si un inciso no encaja en ninguno, casi siempre es de sustitución ($u=\sqrt{x}$, $u=e^x$, $u=\ln x$) seguida de uno de los otros métodos.